**Региональный этап олимпиады по математике,
 8 класс,
2018-19 учебный год**

**Время выполнения 180 минут.**

**Решения и ответы**

1. При каких значениях $a$ значение $\left(x\_{1}-7x\_{2}\right)\left(x\_{2}-7x\_{1}\right),$ где $x\_{1}$ и $x\_{2}$ - корни квадратного трехчлена $x^{2}-3ax+a-\frac{1}{4},$ принимает наибольшее значение?

*Решение: По теореме Виета* $\left\{\begin{array}{c}x\_{1}+x\_{2}=3a,\\x\_{1}∙x\_{2}=a-\frac{1}{4}.\end{array}\right.$ *Тогда* $\left(x\_{1}-7x\_{2}\right)\left(x\_{2}-7x\_{1}\right)=50x\_{1}x\_{2}7\left(\left(x\_{1}+x\_{2}\right)^{2}-2x\_{1}x\_{2}\right)=-63a^{2}+64a-16.$

*Значит,* $x\_{0}=a=-\frac{b\_{1}}{2a\_{1}}=\frac{32}{63}$ *- наибольшее значение данного выражения. Остается проверить наличие корней* $x\_{1}$$x\_{2}$ *при* $a=\frac{32}{63}; x^{2}-3∙\frac{32}{63}x+\frac{32}{63}-\frac{1}{4}=x^{2}-\frac{32}{21}x+\frac{65}{252}; \frac{D}{4}=(\frac{16}{21})^{2}-\frac{65}{252}=\frac{256}{441}-\frac{65}{252}>0.$

*Итак,* $a=\frac{32}{63}. $*(7 баллов)*

1. Доказать, что если $a^{2}b^{2}=a+b,$ где $a>0, b>0,$ то $\frac{a^{2}}{b^{2}}=\frac{a^{3}+a^{2}+1}{b^{3}+b^{2}+1}.$

*Решение: При* $a=b$ *получим тождество. Пусть* $a\ne b.$ *Так как* $a^{2}b^{2}=a+b,$ *то* $a^{2}b^{2}\left(a-b\right)=\left(a+b\right)\left(a-b\right),$

*или* $a^{2}b^{2}\left(a-b\right)=a^{2}-b^{2},$ *или* $a^{3}b^{2}-a^{2}b^{3}=a^{2}-b^{2}.$

*Прибавим к обеим частям* $a^{2}b^{2}\ne 0:$

$$a^{3}b^{2}-a^{2}b^{3}+a^{2}b^{2}=a^{2}-b^{2}+a^{2}b^{2},$$

*или* $a^{2}b^{3}+a^{2}b^{2}+a^{2}=a^{3}b^{2}+a^{2}b^{2}+b^{2},$

*откуда* $\frac{a^{2}}{b^{2}}=\frac{a^{3}+a^{2}+1}{b^{3}+b^{2}+1}. $*(7 баллов)*

1. Почему на приведенном рисунке изображена невозможная ситуация?



*Решение: Очевидно, что координата точки пересечения прямой с осью* $OX$ *находится из условия* $2ax+b=0,$ *откуда* $x=-\frac{b}{2a},$ *что совпадает с абсциссой вершины параболы. Поскольку эти две точки не совпадают, то такая ситуация невозможна. (7 баллов)*

1. Доказать, что если $x>y$ и $xy=2\sqrt{2},$ то справедливо неравенство: $\frac{x^{4}+y^{4}}{x^{2}-y^{2}}\geq 8.$

*Решение:* $x^{4}+y^{4}=(x^{2}-y^{2})^{2}+2x^{2}y^{2}.$

*Поскольку* $xy=2\sqrt{2},$ *то* $x^{4}+y^{4}=(x^{2}-y^{2})^{2}+16.$

*Пусть* $x^{2}-y^{2}=z,$ *тогда запишется в виде*

$x^{4}+y^{4}=z^{2}+16,$

$з$*начит* $\frac{x^{4}+y^{4}}{x^{2}-y^{2}}=\frac{z^{2}+16}{z}=z+\frac{16}{z},$ *где* $z>0,$ *так как* $x>y.$

 *Но* $z+\frac{16}{z}\geq 2\sqrt{z∙\frac{16}{z}}=8,$ *тогда, если*$x>y$ *и* $xy=2\sqrt{2},$*то* $\frac{x^{4}+y^{4}}{x^{2}-y^{2}}\geq 8,$ *ч.т.д.*

*(7 баллов)*

1. В коробке находятся 30 черных и белых шаров. Определить, сколько белых и сколько черных шаров в коробке, если среди любых 12 шаров хотя бы 1 белый, а среди любых 20 шаров хотя бы 1 черный.

*Решение: Пусть было* $x$ *- белых и* $y$ *черных шаров, тогда* $\left\{\begin{array}{c}x+y=30,\\x\leq 19,\\y\leq 11\end{array}\right.$$\left\{\begin{array}{c}x=30-y,\\-y\geq -11,\\x\leq 19\end{array}\right.$$⇒\left\{\begin{array}{c}x=30-y\geq 30-11=19,\\x\leq 19\end{array}\right.$$⟹\left\{\begin{array}{c}x\geq 19,\\x\leq 19\end{array}\right.$$⇒x=19.$

*Итак, в коробке 19 белых и 14 черных шаров.(7 баллов)*